

Axiale und tangentielle Magnetfelder in Supraleiterkabeln

Supraleitende Kabel zur Übertragung großer Leistungen werden aus schmalen und sehr dünnen supraleitenden Streifen aufgebaut, die man nebeneinander in einem bestimmten Winkel um einen Träger, den sogenannten Former, wickelt. Dadurch wird der Strom I auf eine schraubenförmige Bahn gezwungen. Bild 1 zeigt ein Kabel mit vier Leiterlagen, die in gegensinnigen Richtungen um den Former gewickelt sind. Damit verfolgt man die Absicht, die Magnetfelder um die Leiterstreifen zu minimieren.

TABLE I
PARAMETERS OF THE HTS TAPE

Parameter	Value
Width	4 mm
Thickness	1 μm
Copper Stabilizer Thickness	20 μm
Hastelloy Thickness	50 μm
Total Thickness	0.1 mm
Average Critical Current	96 A

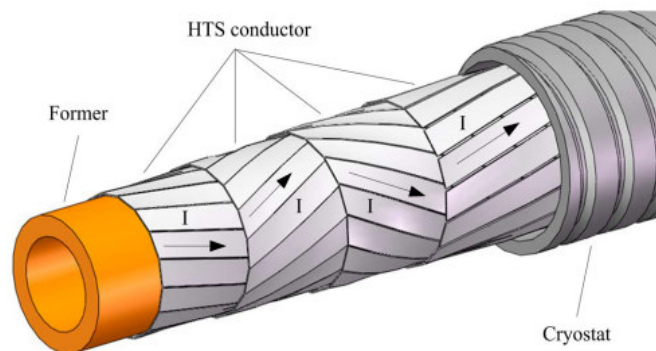


Fig. 1. Schematic view of the windings in an HTS cable conductor with four layers.

Bild 1: Darstellung eines Supraleiterkabels mit vier Leiterschichten aus [1].

Für den Betrieb von Supraleiterkabeln sind Induktivitäten der einzelnen Leitungsschichten von großer Bedeutung, weil sich die Stromverteilung überwiegend nach den Induktivitäten einstellt. Die Induktivität einer Anordnung von Bild 2 kann mit Hilfe des Durchflutungssatzes aus der Energie des Magnetfeldes berechnet werden.

Die n nebeneinander liegenden Streifen darf man als einen Streifen mit der Breite nb (n = Anzahl, b = Breite) auffassen, der mit der Steigung l_p (in der angelsächsischen Literatur als Pitch bezeichnet) spiralförmig um den Träger gewickelt ist. Das Kabel stellt damit eine sehr lange Spule mit einer flächigen Wicklung dar. Der schräg zur Kabelachse verlaufende Strom läßt sich in eine axiale Komponente

$$I_a = I \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

und eine tangentielle Komponente

$$I_t = I \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

zerlegen. Die tangentiale Komponente erzeugt im Innern des Wickels ein magnetisches Feld \mathbf{B}_a in axialer Richtung (Spulenfeld). Die axiale Komponente des Stroms erzeugt dagegen ein tangentiales Feld \mathbf{B}_t außen um die Leiter herum, wie es bei einem normalen stromdurchflossenen Leiter entsteht.

Den axialen und tangentialen Feldkomponenten können Induktivitätsbeläge zugeordnet werden.

Berechnung der Feldkomponenten

Nachfolgend werden die Felder berechnet, die zu den Stromkomponenten der Gln. 1 und 2 gehören. Zur Bestimmung der axialen Feldkomponente \mathbf{B}_a dient Bild 2.

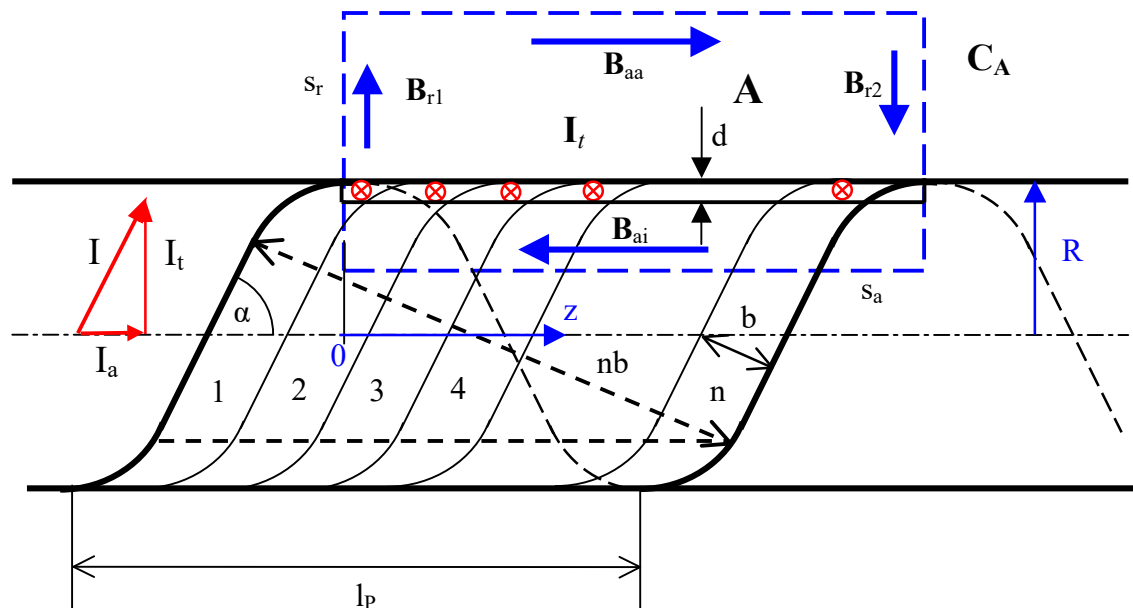


Bild 2: Kabel mit n nebeneinander auf den Träger gewickelten Leiterstreifen.

Das innere Feld \mathbf{B}_{ai} findet man mit Hilfe des Durchflutungssatzes

$$\oint_{C_A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \quad (3)$$

Das Umlaufintegral auf der Kontur C_A über die Flußdichte \mathbf{B} ist proportional zum Flächenintegral der Stromdichte \mathbf{J} über die Fläche A , die von der Kontur C_A umschlossen wird. Proportionalitätsfaktor ist μ_0 . Die Anwendung des Satzes auf die Verhältnisse von Bild 2 stellt sich folgendermaßen dar:

Das Integral über die Kontur C_A kann auf die vier Geradensegmente des blauen Rechteckes aufgeteilt werden:

$$\oint_{C_A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B}_{ai} \cdot \mathbf{s}_a + \mathbf{B}_{r1} \cdot \mathbf{s}_r + \mathbf{B}_{aa} \cdot \mathbf{s}_a + \mathbf{B}_{r2} \cdot \mathbf{s}_r \quad (4)$$

Die Kontur wird dabei in Form einer Rechtsschraube um den Strom durchlaufen. Über die Flußdichte auf den einzelnen Abschnitten treffen folgende Annahmen zu:

Da das Kabel sehr lang ist und nur ein Ausschnitt betrachtet wird, sind die vertikalen Komponenten der Flußdichte \mathbf{B}_{r1} und \mathbf{B}_{r2} Null. Außerhalb des Kabels verteilt sich die Flußdichte weiträumig, so

daß die Flußdichte \mathbf{B}_{aa} außerhalb auf der Kontur sehr klein ausfällt und daher vernachlässigt werden kann. Da außerdem $s_a = l_p$ gewählt wurde, erhält man für das Umlaufintegral

$$\oint_{C_A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B}_{ai} \cdot \mathbf{s}_a = B_{ai} \cdot l_p \quad (5)$$

Das Flächenintegral über die Stromdichte ergibt sich auf folgende Weise:

In jedem Streifen fließt ein Streifenstrom \mathbf{I}_k , d. h. der Gesamtstrom ist $\mathbf{I} = \sum_1^n \mathbf{I}_k$. Vereinfachend

kann man auch annehmen, daß alle Streifenströme den gleichen Wert \mathbf{I}_s haben. Dann gilt $\mathbf{I} = n \cdot \mathbf{I}_s$.

Die Streifen haben die Breite b und die Dicke d . Die Stromdichte in den Streifen beträgt dann

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{I}}{n \cdot b \cdot d}. \text{ Die Normale der Fläche } \mathbf{A} \text{ sei in die Bildfläche hinein gerichtet. Die gleiche Rich-}$$

tung hat die tangentielle Komponente der Stromdichte. Damit kann man für das Integral über die Stromdichte von Gl. 4 in Zylinderkoordinaten schreiben

$$\iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \int_0^{l_p} \int_{R-d}^R \frac{I \sin \alpha \cdot \mathbf{e}_\varphi}{n \cdot b \cdot d} \cdot dr \cdot dz \cdot \mathbf{e}_\varphi = \int_0^{l_p} \frac{I \sin \alpha \cdot \mathbf{e}_\varphi}{n \cdot b} \cdot dz \cdot \mathbf{e}_\varphi = I \sin \alpha \cdot \frac{l_p}{n \cdot b} \quad (6)$$

Da der Strom nur in dem schmalen Band $d \cdot l_p$ existiert, konnten die Integrationsgrenzen in der dargestellten Weise gewählt werden. Aus Bild 2 geht noch hervor $n \cdot b = l_p \sin \alpha$. Damit wird aus Gl. 6

$$\iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = I \quad (7)$$

Aus den Gln. 3, 5 und 7 erhält man nun die axiale Feldstärke im Innern des Kabels:

$$B_{ai} = \frac{\mu_0}{l_p} I \quad \text{für } r < R \quad (8)$$

Die schräge Wicklung der Streifen führt auch zu einer axialen Stromkomponente, die mit einem tangentialen Feld verbunden ist. Um dieses zu ermitteln wird das Kabel von Bild 2 in die Ebene abgewickelt. Dies ist in Bild 3 dargestellt. Die grauen Flächen sind in die Bildebene geklappte Schnittflächen durch die Leiterstreifen. Die Dicke d ist als klein anzusehen.

Grundlage der Betrachtung ist wieder Gl. 3. Ihr linker Teil ergibt diesmal

$$\oint_{C_A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_t 2\pi r \quad \text{für } r > R \quad (9)$$

Für die Fläche gilt nun $\mathbf{A} = \pi r^2 \mathbf{e}_z$ und $d\mathbf{A} = 2\pi r dr \mathbf{e}_z$. Die Umrandung der kreisförmigen Fläche ist in Bild 3 dargestellt durch die gestrichelte blaue Gerade. Da die Fläche rotationsymmetrisch ist, wird das Doppelintegral zum Einfachintegral. Außerdem existiert die Stromdichte \mathbf{J} nur in den dünnen Streifen der Dicke d .

$$\mu_0 \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \int_{R-d}^R \frac{I \cos \alpha}{n \cdot b \cdot d} \mathbf{e}_z \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot \mathbf{e}_z = \mu_0 \frac{I \cos \alpha}{n \cdot b \cdot d} 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_{R-d}^R \quad (10)$$

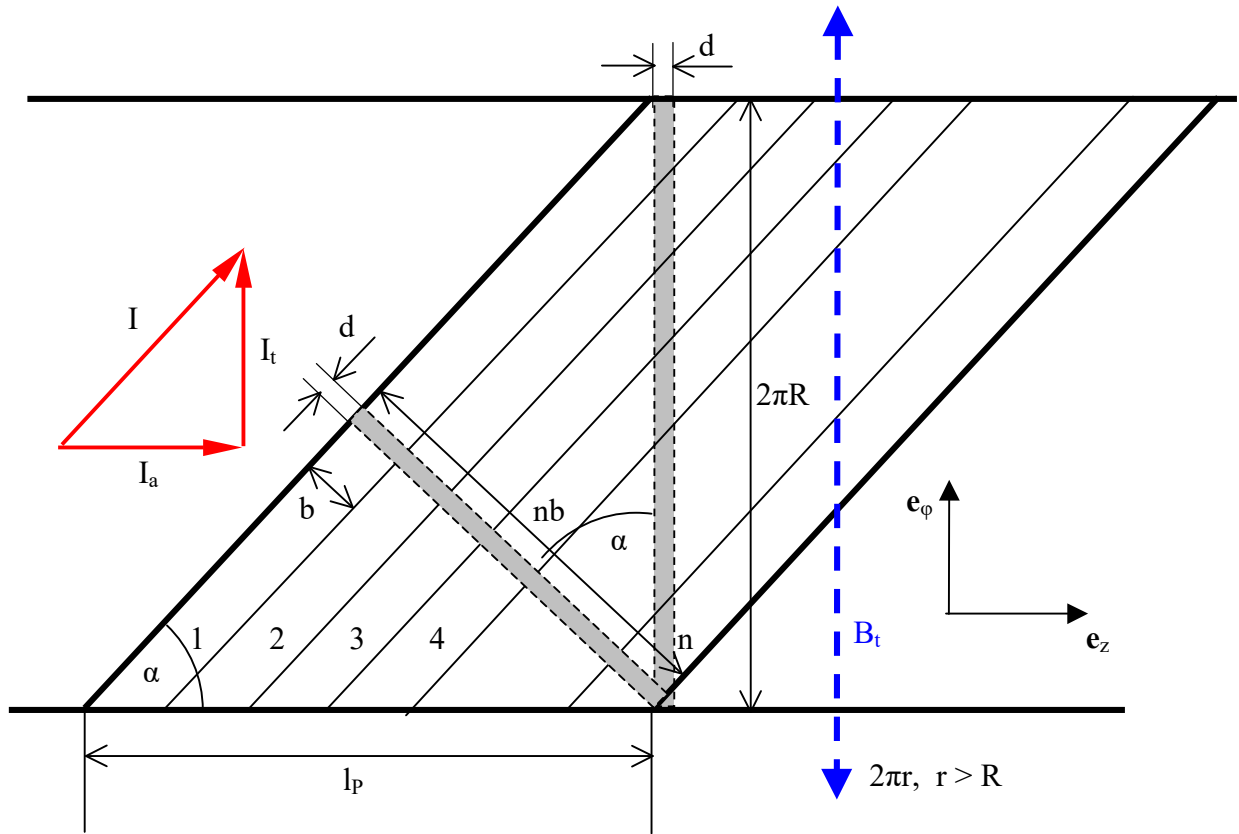


Bild 3: Abgewickelter Leiter mit n Leiterstreifen.

$$\mu_0 \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \frac{I \cos \alpha}{n \cdot b \cdot d} \pi (R^2 - (R - d)^2) = \mu_0 \frac{I \cos \alpha}{n \cdot b} \pi (2R - d) \quad (11)$$

In Gl. 11 kann d gegen $2R$ vernachlässigt werden, so daß man erhält

$$\mu_0 \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \approx \mu_0 \frac{I \cos \alpha}{n \cdot b} 2\pi R \quad (12)$$

Aus Bild 3 entnimmt man noch die Beziehung

$$n \cdot b = 2\pi \cdot R \cdot \cos \alpha$$

Damit wird aus Gl. 12

$$\mu_0 \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \frac{I \cos \alpha}{2\pi R \cdot \cos \alpha} 2\pi R = \mu_0 I \quad (13)$$

Dies ist nun zu Gl. 9 gleichzusetzen, so daß sich folgende tangentiale Flußdicht außerhalb des Leiters ergibt

$$B_t = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \quad \text{für } r > R \quad (14)$$

Dies ist genau die Flußdichte, die einen geraden, vom Strom I durchflossenen Leiter umgibt. Mit den Gln. 8 und 14 sind nun die beiden Feldkomponente, axial und die tangential, bekannt. Diesen Feldkomponenten werden im nächsten Abschnitt Induktivitätsbeläge zugeordnet.

Induktivitätsbeläge

Die Induktivitätsbelege werden über die Energiedichte der Felder berechnet. Die lokale Energiedichte des axialen Magnetfeldes beträgt

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B_{ai}^2 = \frac{\mu_0}{2l_p^2} I^2 \quad (15)$$

Die Energie pro Längeneinheit ergibt sich aus der Integration von w über den Kreisquerschnitt.

$$W' = \int_0^R w \cdot 2\pi r \cdot dr = \int_0^R \frac{\mu_0}{2l_p^2} I^2 2\pi r \cdot dr = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{R^2}{l_p^2} I^2 \quad (16)$$

Damit erhält man für die Induktivität pro Längeneinheit, den Induktivitätsbelag

$$L' = \frac{2W'}{I^2} = \mu_0 \pi \frac{R^2}{l_p^2} \quad (17)$$

Mit

$$\tan \alpha = \frac{2\pi R}{l_p} \quad (18)$$

kann man auch schreiben

$$L' = \frac{\mu_0}{4\pi} \tan^2 \alpha \quad (19)$$

Die Gln. 17 und 19 geben also den Induktivitätsbelag *einer* Schicht von Supraleitern an, der mit der tangentialen Stromkomponente zusammenhängt.

Das tangentielle Magnetfeld der axialen Stromkomponente hat im Bereich $r > R$ die lokale Energiedichte

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B_t^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{2\pi r} \right)^2 I^2 = \frac{\mu_0}{2(2\pi r)^2} I^2 \quad (20)$$

Die Energie pro Längeneinheit ergibt sich aus der Integration von w über den Kreisquerschnitt in den Grenzen von R bis zu einem konzentrischen Rückleiter mit Radius R_E .

$$W' = \int_R^{R_E} w \cdot 2\pi r \cdot dr = \int_R^{R_E} \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} I^2 \cdot dr = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \ln \frac{R_E}{R} \quad (21)$$

Damit erhält man für die Induktivität pro Längeneinheit, den Induktivitätsbelag

$$L' = \frac{2W'}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_E}{R} \quad (22)$$

Gl. 22 ist von der Wickeltechnik der Leiterstreifen unabhängig und entspricht dem Ergebnis, das man für einen ungewickelten, coaxialen Leiter erhält. Die Gln. 8, 17 und 19 dagegen sind eine Funktion des Steigungswinkels. Beim Steigungswinkel Null wird im Innern des Kabels kein Feld erzeugt. Durch die schräge Wicklung der Supraleiterstreifen entsteht also eine zusätzliche Induktivitätskomponente, die über den Steigungswinkel eingestellt werden kann.

Die Ergebnisse der Gln. 8 und 14 decken sich mit den Angaben in der Arbeit von [2]. Sie werden dort jedoch nicht hergeleitet. Viele Autoren, die sich mit supraleitenden Kabeln befassen, ziehen diese Arbeit als Referenz heran.

1. Han Zhang, Yinshun Wang, and Jiping Xue: Electromagnetic Field Analysis of a High Current Capacity DC HTS Cable With Self-shielding Characteristic by 2-D Simulation. IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY, VOL. 26, NO. 7, OCTOBER 2016
2. S. Krüger Olsen, C. Træholt, A. Kühle, O. Tønnesen, M. Daumling, J. Østergaard: Loss and Inductance Investigations in a 4-layer Superconducting Prototype Cable Conductor. IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY, VOL. 9, NO. 2, JUNE 1999